El papel de la geometría como herramienta para la didáctica de la matemática

Eduardo Mancera Martínez
Comité Interamericano de Educación Matemática
México

Introducción

Aunque los vínculos entre las diversas ramas de la matemática son frecuentes, las propuestas curriculares presentan una perspectiva de parcelación del conocimiento matemático y solamente se indican relaciones entre diferentes áreas para realizar ejercicios o presentar algunos problemas. Sin embargo en el desarrollo conceptual es importante conocer puntos de enlace importante entre diversos contenidos.

La aritmética o el álgebra se utilizan para resolver problemas geométricos y frecuentemente se hace lo contrario, emplear algunas nociones de geometría para resolver problemas aritméticos o algebraicos. Pero sobre todo no se promueven formas de enseñanza basadas en configuraciones geométricas para introducir algunos conceptos o procedimientos de contenidos propios de la aritmética y al álgebra.

En esta participación se presentarán algunas formas de enseñanza basadas en configuraciones geométricas para resaltar algunas relaciones numéricas o algebraicas, además de resaltar la importancia de las relaciones geométricas para enfatizar relaciones entre representaciones algebraicas y gráficas para apoyar la enseñanza del cálculo de funciones reales de una variable real.

Bloques de Dienes

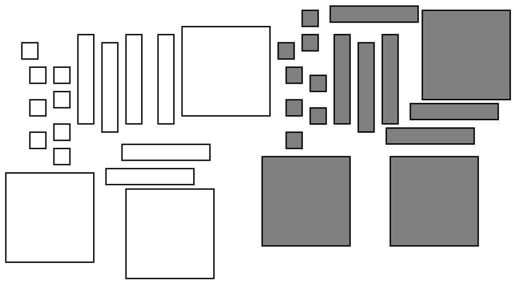
A través del tiempo han permanecido algunas consignas "pedagógicas" en la enseñanza de la matemática:

Partir de lo concreto para llegar a lo abstracto
Ir de lo fácil a lo difícil

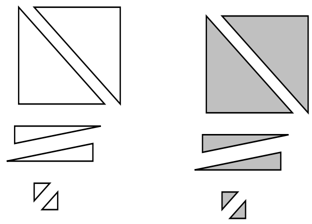
Pero esto se ha interpretado de muchas maneras. El problema de la enseñanza se transfiere a determinar lo que es *concreto* o lo que *fácil*. Hasta hoy no se ha resuelto satisfactoriamente este asunto, es un pendiente. También en este espacio se dejará pendiente, pero conviene mostrar los candidatos a materiales concretos y la forma de enfocar la sencillez del tratamiento.

Se considerarán unos materiales denominados ***Bloques de Dienes***, dichos materiales fueron promovidos de manera importante en los años sesentas y setentas, pero por alguna razón no tuvieron el impacto esperado. Estos materiales se promueven también en la actualidad por distribuidores de "**manipulativos**" como el de *Algebra Tiles* o los *Algeblocks*, entre otros. Algunos presentan variaciones importantes que amplían las posibilidades de uso como es el caso de los *Algeblocks*.

Los Bloques de Dienes constan de varios cuadrados grandes y pequeños y regletas de ciertas dimensiones:



En diversas partes utilizaremos una variante de estos materiales que se contruyen a partir de los mismos bloques seccionándolos por la mitad:



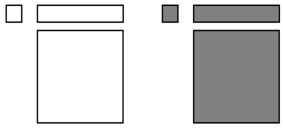
Esta modificación la difundió el maestro Fortino Escareño, amigo y cómplice en algunas aventuras editoriales, variante que no se encuentra en otras presentaciones por lo que es importante atribuir a Fortino, lo que le corresponde.

Cualquier maestro puede elaborar sus propios Bloques de Dienes con diversos materiales y considerando las dimensiones adecuadas que más le acomoden. Pueden utilizar acrílico para ser utilizados con un retroproyector, con cartulina y fragmentos de tiras imantadas si se utiliza un pizarrón magnético, con cartón y lijas u otros materiales para usarlos con una franela, entre otras formas.

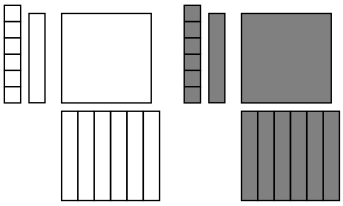
Los alumnos los pueden elaborar sus propios bloques con cartulinas, madera, plásticos u otro tipo de materiales.

Ya existen versiones comerciales para el maestro y el alumno en el mercado y pueden adquirirse en internet o diversas casas comerciales.

Para construir los propios Bloques de Dienes es importante señalar que el lado del cuadrado pequeño es uno de los lados de las regletas (rectángulos) y el otro lado de éstas es el lado del cuadrado mayor:



Otro detalle importante digno de considerar es que con los cuadrados pequeños no se puede cubrir de manera exacta el largo de las regletas ni con éstas se puede cubrir de manera exacta los lados del cuadrado grande.



Estos manipulativos han sido utilizados durante mucho tiempo en la enseñanza pero requieren de una planeación rigurosa por parte del maestro, su uso sin ello está condenado al fracaso.

Supuestos constructivistas

El uso de estos materiales está afiliado con algunas corrientes "constructivistas", pero dada la polémica en torno al constructivismo (la cual ha sido expuesta ampliamente en diversas obras como la compilación de Carretero, Castorina y Baquero, 1998) solamente se plantearán algunos supuestos compartidos para el desarrollo del tema en esta participación. Por otra parte, la exposición trata de evitar el enciclopedismo innecesario en este tipo de exposición que pretende abarcar diversos tipos de audiencia.

Un punto importante es la *actividad* con objetos o software que permiten la experimentación constantemente. En esta plática se hará referencia a los Bloques de Dienes y software para la graficación de funciones. Denominaremos a estos recursos como "materiales".

Al inicio las actividades deben ser un tanto libres, sin pretender incorporar los conocimientos formales, solamente se tratará de establecer algunas características del material empleado y en su caso establecer reglas para su uso, dejando libertad al estudiante para crear sus *propios significados*. Este es el sentido de *sencillez* que se asume.

El *conocimiento se construye*, los conceptos y procedimientos no se adquieren de manera de manera instantánea, definitiva y estable, no se "aprenden" en el sentido de tenerlos para sí, de atraparlos, como se asume en corrientes como el platonismo.

Generalmente, el término "aprendizaje", se asocia a un proceso en el cual se considera que los conocimientos están por ahí y de repente, por alguna situación, nos percatamos de su existencia y nos apropiamos de ellos, los tomamos para sí de manera completa. En otro sentido, la "construcción de conocimientos", indica un proceso en el que se forman ideas, representaciones o imágenes mentales de los conceptos o procedimientos, pero como parte de un *proceso de aproximaciones sucesivas*, no necesariamente es un proceso concluyente.

Renovamos constantemente las nociones construidas y lo vamos enriqueciendo con otras experiencias. Se van reformulando con el tiempo y de acuerdo con nuestras experiencias.

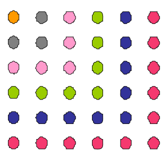
En la matemática, disciplina caracterizada por sus conceptos abstractos, es indispensable pasar de un contacto con situaciones en las que el estudiante pueda realizar algunas indagaciones y formular sus propias ideas sobre lo que sucede, antes de arribar a la simbolización y el manejo abstracto. La enseñanza ha puesto mayor énfasis en el manejo de representaciones escritas, como si esto asegurara que se han construido significados o se le da algún sentido a lo que expresan. El proceso de construcción de conocimientos se realiza por medio de un *proceso constante de construcción de significados y representaciones mentales, en construcción de representaciones escritas propias*, antes de arribar a las representaciones escritas convencionales.

Este proceso de construcción de significados es inevitable, muestra de ello es una broma, difundida en escuelas formadoras de docentes, en la cual se dice que en las clases de matemáticas:

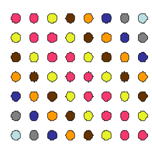
El maestro piensa una cosa, dice otra, escribe otra, explica otra y el alumno también entiende otra.

Relaciones aritméticas[1]

Desde la antigüedad se han trabajado representaciones geométricas para resaltar propiedades de los números naturales, por ejemplo los números triangulares o los números cuadrados:



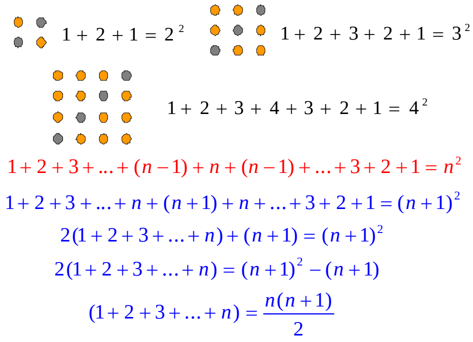
$$1+3+5+7+9+11=6^2$$
$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

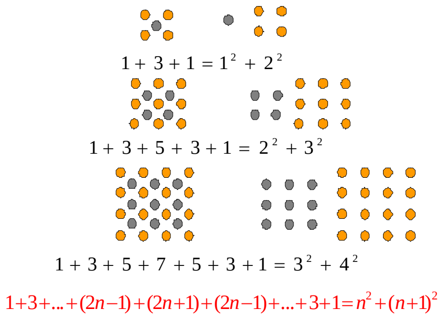


$$1+2+3+4+5+6+7+7+6+5+4+3+2+1=7\times 8$$
$$1+2+3+\ldots+n+n+\ldots+3+2+1=n(n+1)$$
$$2(1+2+3+\ldots+n)=n(n+1)$$
$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

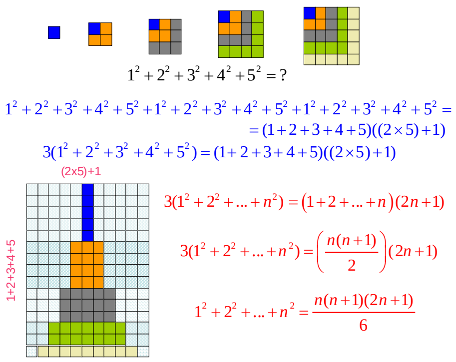
[1] Las ideas expresadas en este apartado se pueden ampliar en el libro: Mancera, E.; Matebloquemática, la forma de aprender matemáticas haciéndose la vida de cuadritos; Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1998.

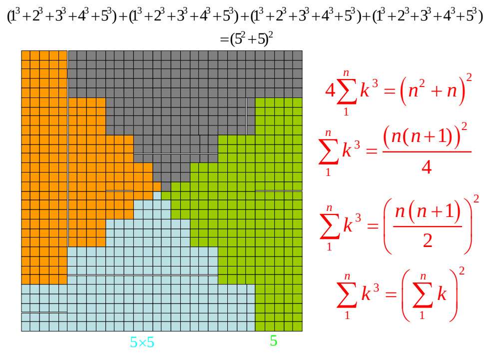
Lo cual conduce a encontrar una fórmula para determinar algunas sumatorias[2]:





Pero también hay configuraciones que ayudan a calcular sumas más complejas:





Adición y substracción de números enteros

Los cuadraditos de colores, pueden ayudar a entender la regla de los signos. Consideremos a los obscuros como unidades positivas y a los blancos como unidades negativas[3]:

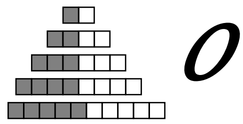
Unidades Negativas **Unidades Positivas**

El cero en los números enteros ***0*** es un equilibrio, por ello se puede representar con los cuadritos de la siguientes maneras:

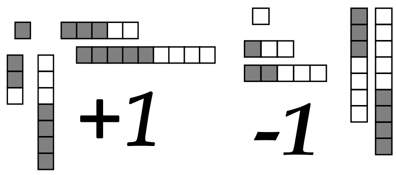
---

[2] Las relaciones numéricas que se presentan pueden ser consultadas en:

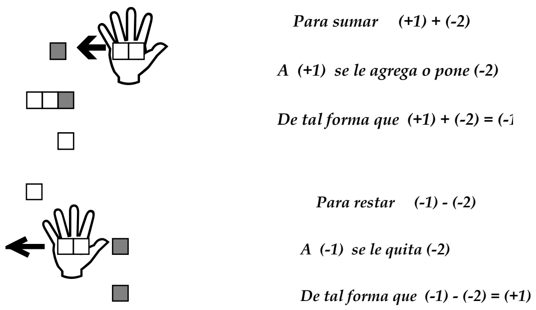
[3] Estas ideas también corresponden a: Mancera, E.; Matebloquemática, la forma de aprender matemáticas haciéndose la vida de cuadritos; Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1998.



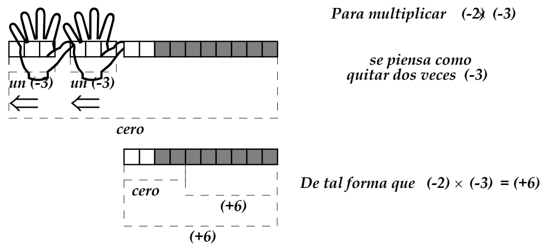
De esta manera también los números enteros tienen representaciones diferentes, por ejemplo, ***+1*** o ***-1*** se pueden representar de las siguientes maneras:



Esto permite hacer algunas adiciones y substracciones de números enteros:



También es posible explicar con estos materiales la multiplicación y división de enteros:

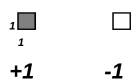


Otra consigna pedagógica que es frecuente comentar en cursos de matemáticas es:

Lo nuevo debe parecerse a lo anterior

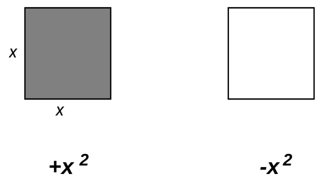
Lo cual hace ver que el manejo de expresiones algebraicas puede trabajarse como se hace con números enteros:

En efecto, consideremos que el cuadrado pequeño tiene una unidad de medida como longitud de su lado, luego entonces su área será 1. Podemos considerar que de acuerdo al color estemos hablamdo de +1 o -1, como ya se trabajo antes:

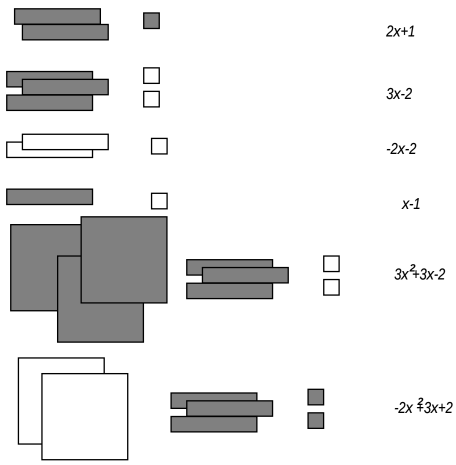


Si en las regletas, la longitud de uno de sus lados es la unidad y consideramos que el otro lado es *x,* entonces el àrea sería $1 \times x = x$, además podríamos convenir que se acuerdo al color se haga referencia a +*x* o -*x*.

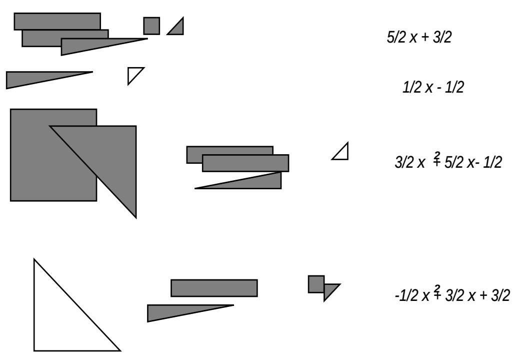
En el mismo orden de ideas como el cuadrado mayor tiene como longitud de su lado el lado mayor de la regleta, o sea *x*, entonces con el se pueden representar $+x^2$ y de acuerdo al color $-x^2$.



De acuerdo con estas convenciones podemos representar expresiones algebraicas con los bloques de Dienes:



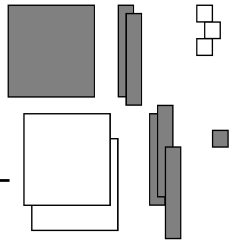
Utilizando mitades de las figuras anteriores también se pueden manejar algunos polinomios con coefcientes fraccionarios:



El uso de los bloques de Dienes permitirá establecer reglas para el manejo de términos semejantes y operaciones entre ellos:

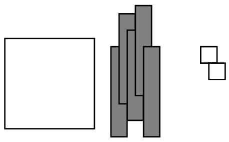
Si se toma en cuenta la suma:

$$\begin{array}{r} x^2+2x-3 \\ + \quad -2x^2+3x+1 \\ \hline \end{array}$$



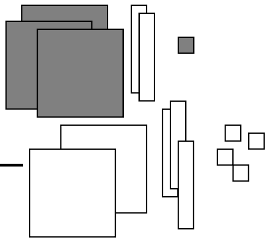
El resultado será:

$$\begin{array}{r} x^2+2x-3 \\ + \quad -2x^2+3x+1 \\ \hline -x^2+5x-2 \end{array}$$

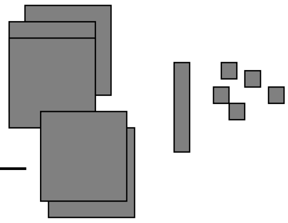


Consideremos ahora la siguiente substracción de polinomios:

$$\begin{array}{r} 3x^2-2x+1 \\ - \quad -2x^2-3x-4 \\ \hline \end{array}$$

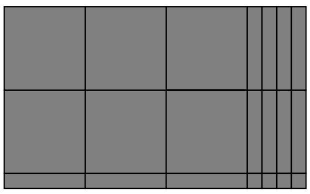


$$\begin{array}{r} 3x^2-2x+1 \\ - \quad -2x^2-3x-4 \\ \hline -5x^2+x+5 \end{array}$$



Cuando consideramos la multiplicación de polinomios, al interpretar esta operación como un área de rectángulo tendremos:

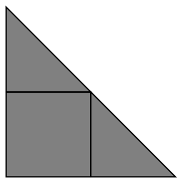
$$(2x+1)\ (3x+4) = 6x^2+11x+4$$



Es posible considerar varias figuras geométricas:

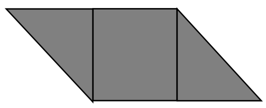
Triángulo

$$2x^2 = x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x^2 + x^2 = \frac{(2x)(2x)}{2}$$



Paralegramo

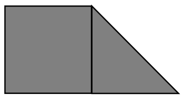
$$2x^2 = x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x^2 + x^2 = (x)(2x)$$



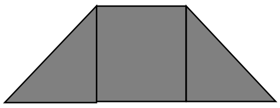
$$2x^2 + 2x = (2x+1)(x)$$

Trapecio

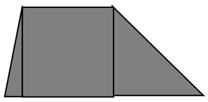
$$x^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{(2x+x)x}{2}$$



$$2x^2 = x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{(3x+x)x}{2}$$

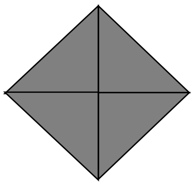


$$\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{((2x+1)+x)x}{2}$$



$$2x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) = 2x^2 + x = \frac{((2x+2)+2x)x}{2}$$

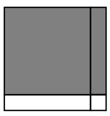
Rombo

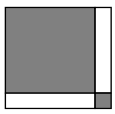


$$4\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{4}{2}x^2 = 2x^2 = \frac{(2x)(2x)}{2}$$

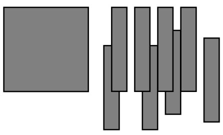
También se pueden trabajar procedimientos algebraicos:

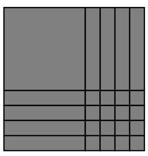
$(x-1)\ (x+1) = x^2 - 1$ $\qquad$ $(x-1)^2 = x^2 - 2x+1$

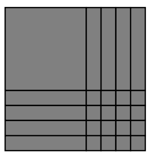


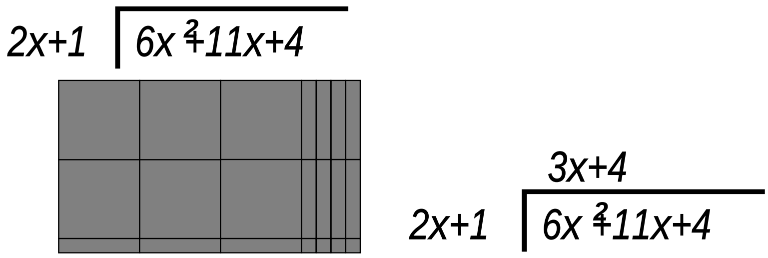


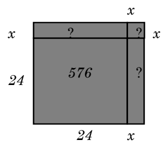
$x^2 + 8x$ $\qquad$ $x^2 + 8x + 16$ $\qquad$ $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$











$$586 \approx 576 + 2(24x)$$
$$48x \approx 586 - 576$$
$$48x \approx 10$$
$$x \approx \frac{10}{48}$$
$$x \approx .208$$

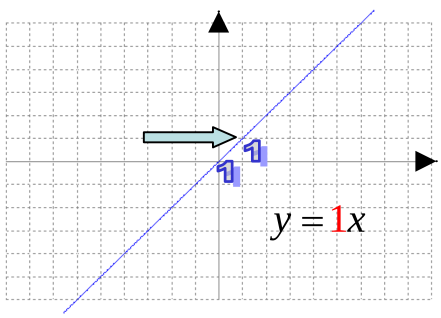
así pues, el lado del cuadrado de área 586 es aproximadamente:

$$24+x = 24+.208=24.208 \qquad \sqrt{586} \approx 24.2074$$

El uso de software

En esta parte utilizaremos nociones de geometría para comprender algunas relaciones entre funciones “complicadas”, a partir de simples rectas y algunas nociones de trasformaciones geométricas. Los desarrollos que se presentan han sido presentados en una publicación períodica[4]

La posibilidad de obtener cualquier recta del plano a partir de movimientos de la recta $y = x$, es muy importante.

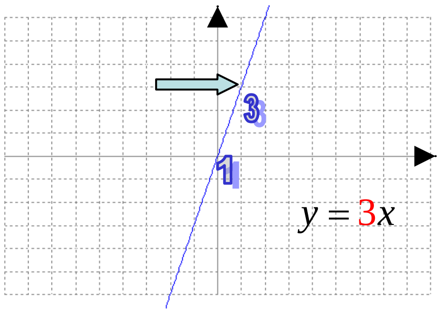


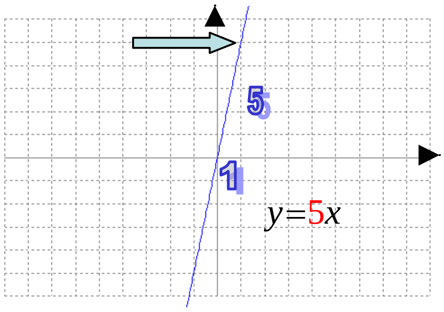
En esta recta, todos los puntos tienen una abscisa igual a su ordenada.

Si se gira la recta en sentido contrario a las manecillas del reloj, sin pasar el eje Y, las ordenadas cambian de acuerdo con el giro y eso se expresa en la ecuación multiplicando a *x* por un número mayor que 1

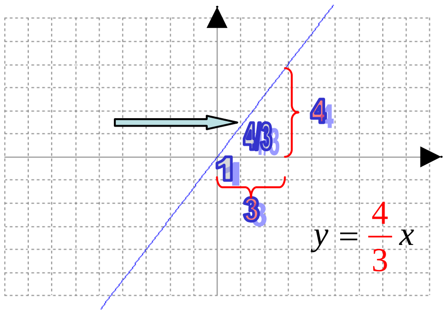
---

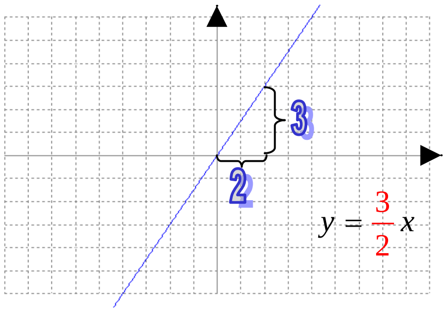
[4] Mancera, E.; La danza de las rectas; Revista Innovaciones Educativas, Texas Instruments, 2005 (por aparecer)



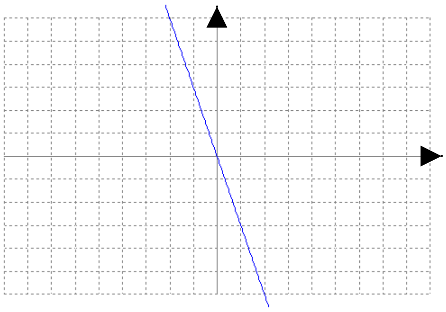


Cuando el factor que multiplica a *x* no es entero, se puede considerarlo como una fracción entre uno o considerando solamente la fracción:

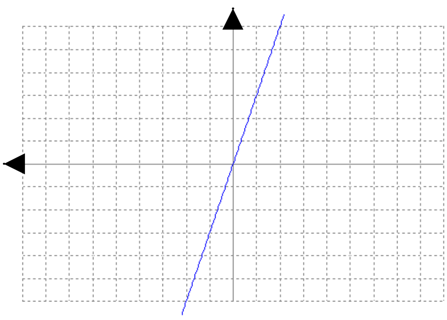




Cuando con el giro se cruza al eje *Y*, se utiliza aquello de que "lo nuevo debe parecerse a lo anterior". Así en este caso vemos la gráfica por la parte posterior para que se parezca a las que ya se trabajaron:

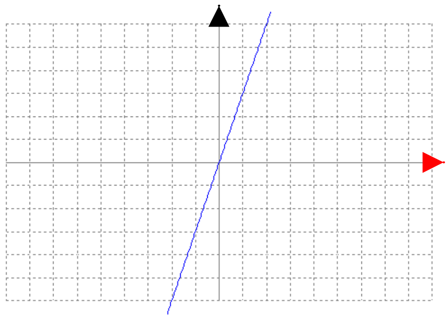


Esta sería un ejemplo, entonces es posible considerar que se observa por la parte posterior



Vista posterior

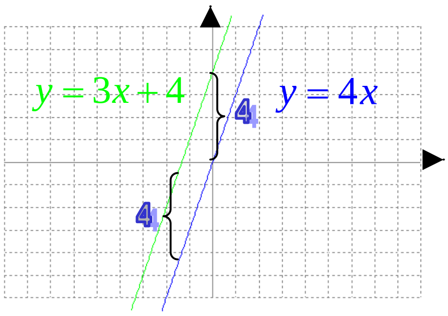
Para verlas como antes sería necesario cambiar la dirección de eje de las abscisas, es decir las abscisas que eran positivas cambian a negativas, einversamente.

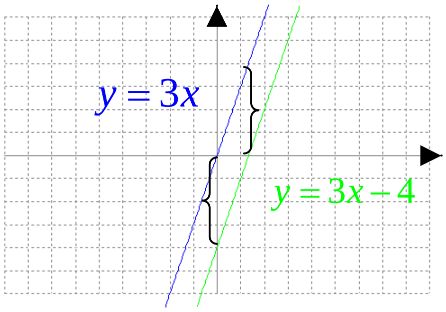


Vista posterior
Cambiando el sentido
del eje X

En esta situación la ecuación sería: $y = 3x$, lo cual se obtuvo solamente cambiando el sentido del eje de las abscisas, entonces la ecuación que corresponderá a la gráfica original solamente será cambiando de signo a las "abscisas", es decir: $y = -3x$

Subir o bajar una recta implicará, sumar o restar una cantidad a las ordenadas:

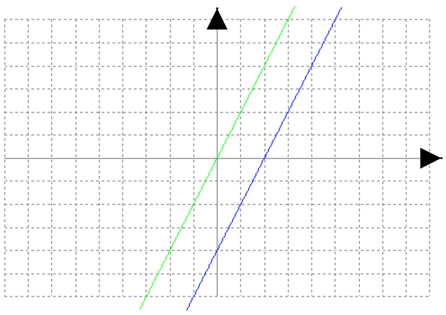


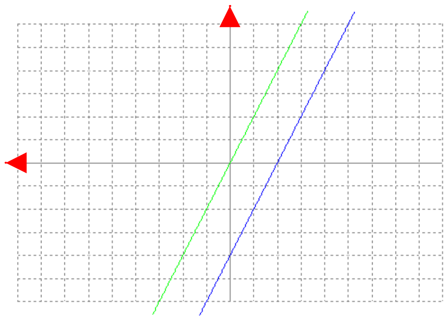


Es importante resaltar que: $y = 3x + 4 \Rightarrow y - 4 = 3x$, es decir, subir una recta 4 unidades, implica "quitarle" 4 unidades a las ordenadas para regresar esa recta al origen.

Similarmente, $y = 3x - 4 \Rightarrow y + 4 = 3x$ en este caso, bajar una recta 4 unidades, implica "agregarle" 4 unidades a las ordenadas para regresar esa recta al origen.

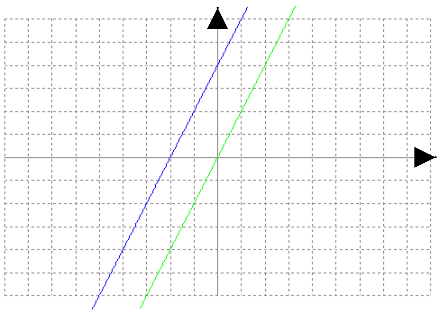
Análogamente, podemos pensar en un desplazamiento de una recta a la izquierda o la derecha e interpretarlo como lo anterior, esto lo conseguimos cambiando los papeles de las abscisas y las ordenadas y prestando atención a cambios de signo, se los ejes se giran 90º en sentido contrario de las manecillas del reloj:

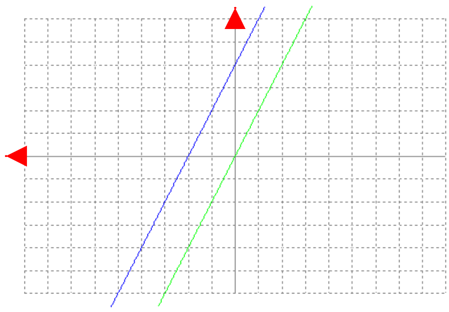




La recta desplazada a la derecha se puede considerar como una recta que se bajó y por tanto tendrá una ecuación del tipo: $y=-\frac{2}{4}x-2$, pero de acuerdo con el intercambio de papeles de abscisas y ordenadas y un cambio de signo en uno de los ejes tenemos, que la ecuación en el sistema original es: $y=-\frac{2}{4}x-2 \Rightarrow -x=-\frac{2}{4}y-2 \Rightarrow y=2(x-2)$ en otra forma: $y=2x-4$

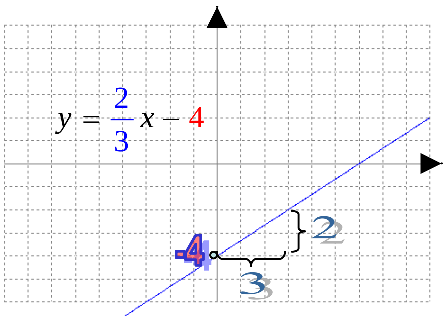
Considerando un desplazamiento a la izquierda, tendríamos:

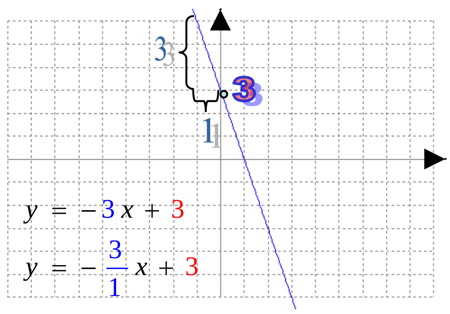




La recta desplazada a la izquierda se interpreta como una recta que se subió derecha y su ecuación sería: $y=-\frac{2}{4}x+2$, considerando los cambios necesarios para regresar al sistema original, tenemos: $y=-\frac{2}{4}x+2 \Rightarrow -x=-\frac{2}{4}y+2 \Rightarrow y=2(x+2)$ en otra forma: $y=2x+4$

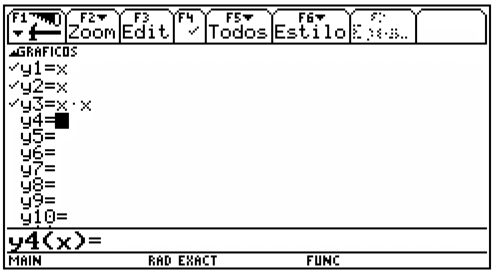
Estas ideas permiten graficar una recta sin tabular, solamente interpretando los valores que aparecen en la ecuación:

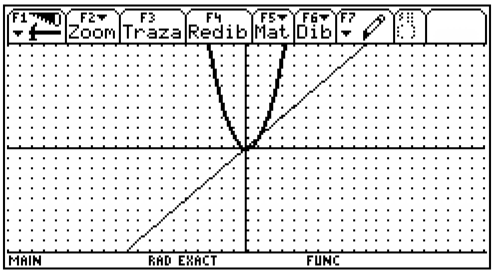




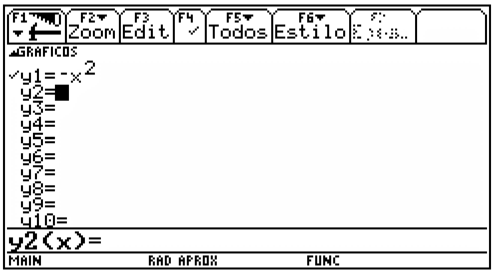
Podremos considerar “sumas” y “substracciones” de rectas, pero un caso muy interesante es la “multiplicación” y “división” de rectas. Consideremos primero la multiplicación de rectas:

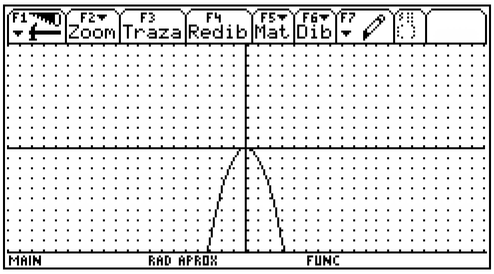
Al multiplicar dos rectas obtenemos parábolas, también podríamos partir de la parábola más sencilla: $y=x^2$



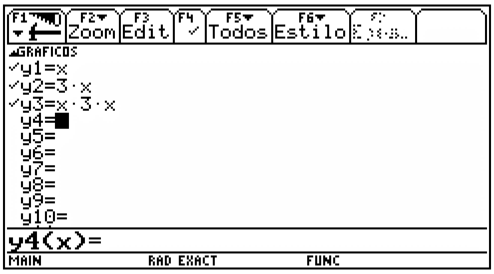


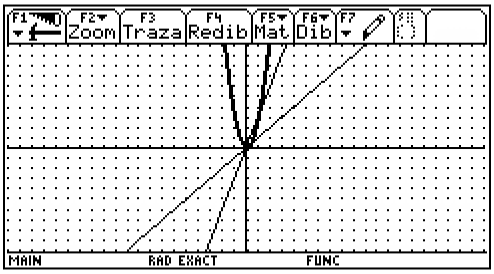
Si se invierte la ecuación quedaría:

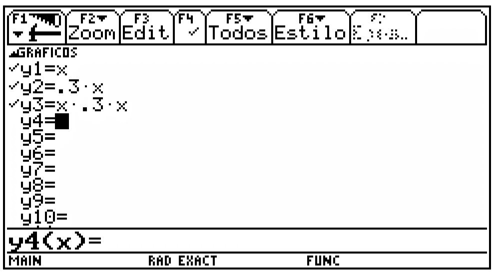


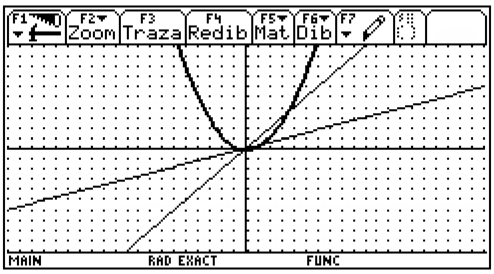


Modificando el coeficiente de *x* en alguna de las rectas o en ambas rectas, obtenemos una parábola más “cerrada” o “abierta”

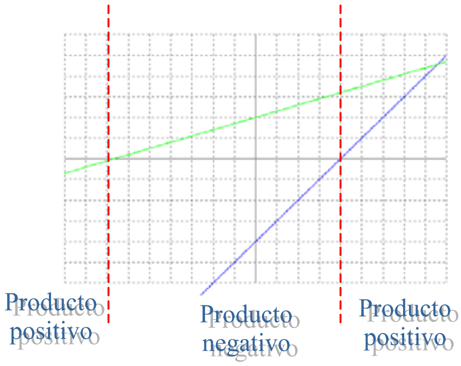


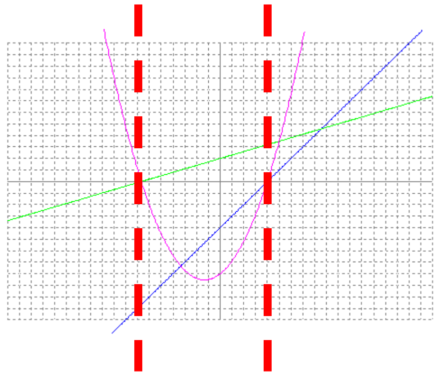
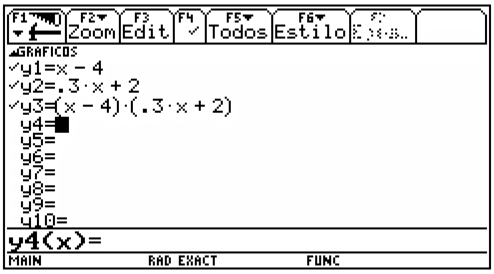


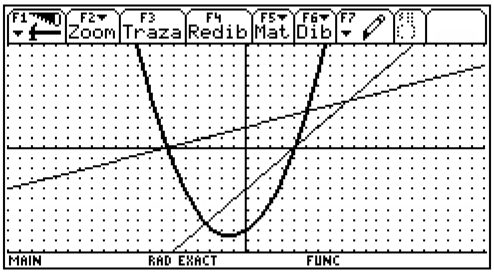




Si ambas rectas no son paralelas a los ejes y no pasan por el origen de coordenadas, la parábola cortará al eje *X* en dos puntos. Esto se puede analizar a partir de los signos del producto de las dos rectas:

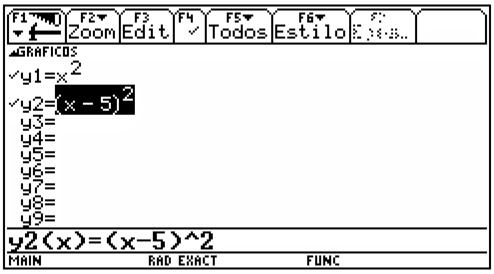


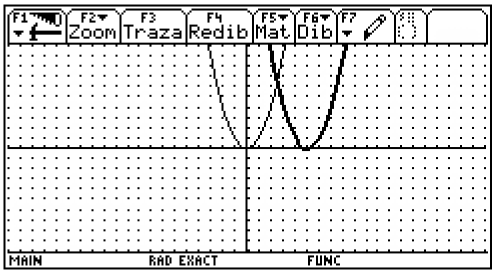





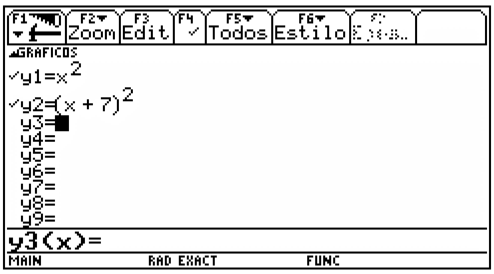
Cuando la parábola no tiene raíces reales, hay que enfocar el asunto de manera general. Consideremos la parábola más sencilla: $y=x^2$. Se puede mover esta en el plano de manera similar al desplazamiento de rectas.

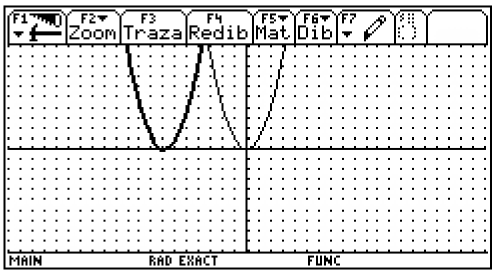
Si se desplaza 5 unidades a la derecha.



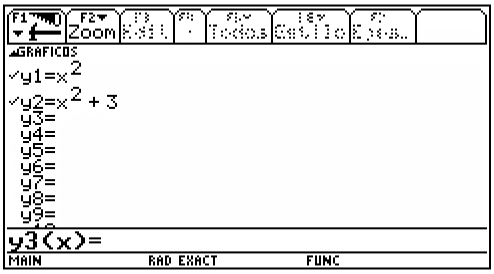


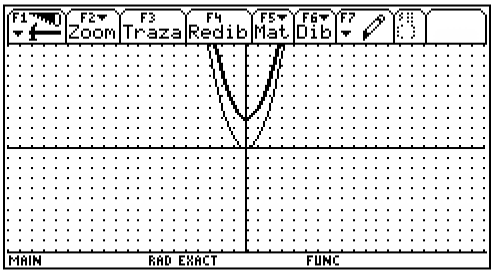
Si el desplazamiento es 7 unidades a la izquierda, obtenemos:



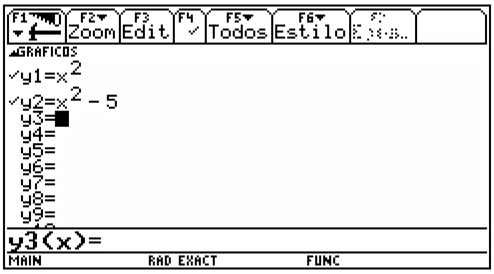


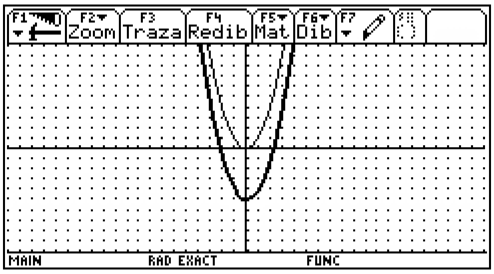
Se puede subir 3 unidades





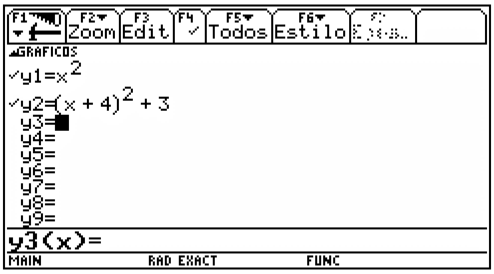
O bajarla 5 unidades

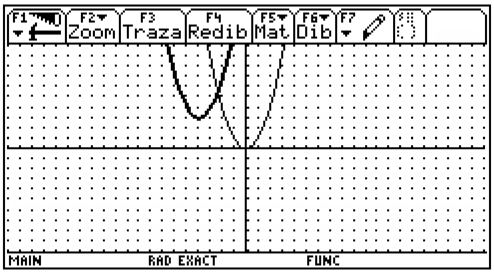




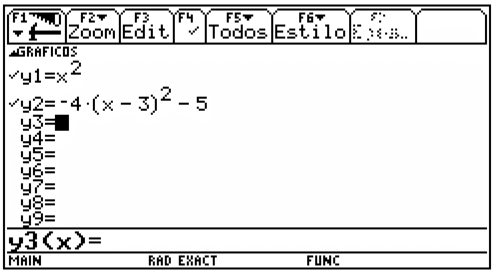
También es posible combinar movimientos:

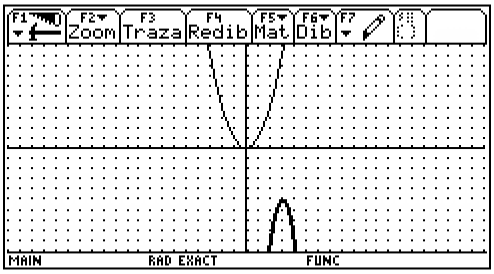
Por ejemplo: desplazar a la izquierda 4 unidades y subirla 3 unidades.





También podemos cerrarla (multiplicarla algún numero mayor que 1), voltearla (multiplicar por -1), moverla a la derecha 3 (restarle a las *x*, tres) unidades y bajarla 5 unidades (restarle a las *y*, cinco).

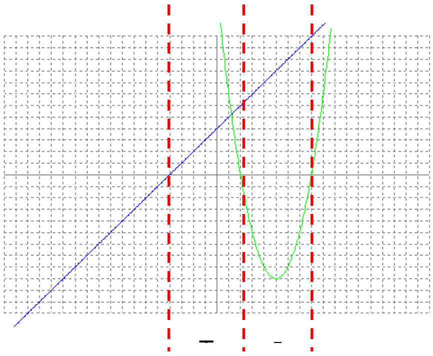


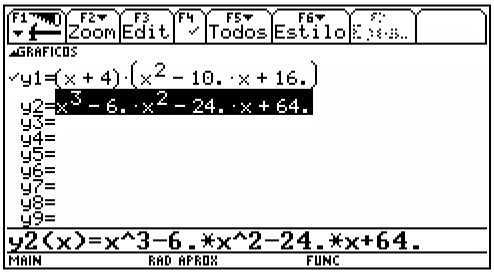


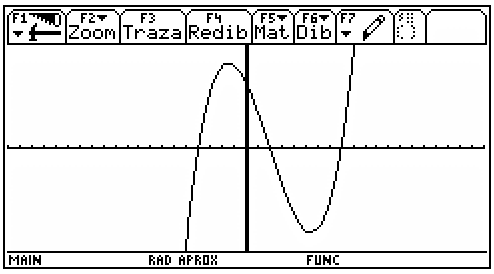
De esto se deducen muchas propiedades de las parábolas:

Con este tipo de procedimientos se pueden explorar algunos polinomios para entender su gráfica a partir de lo que se expresa en su expresión algebraica.

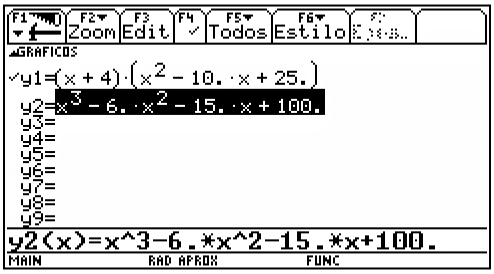
Por ejemplo, una recta por una parábola con dos raíces reales:

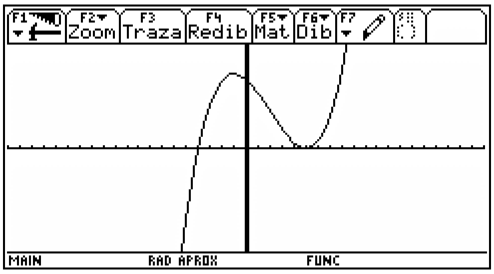




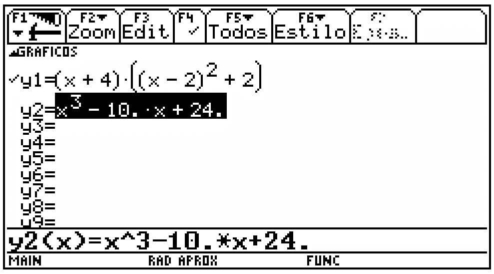


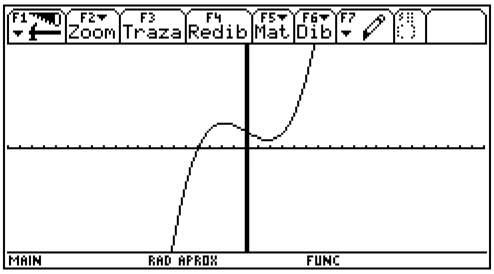
Una recta por una parábola con una raíz:

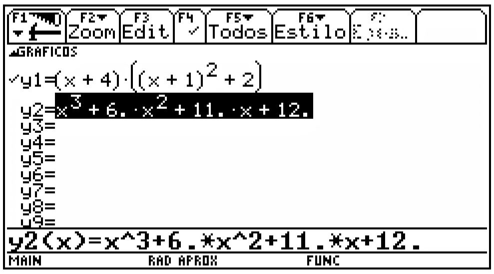


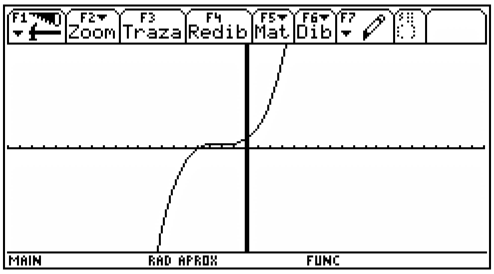


Una recta con una parábola sin raíces reales:



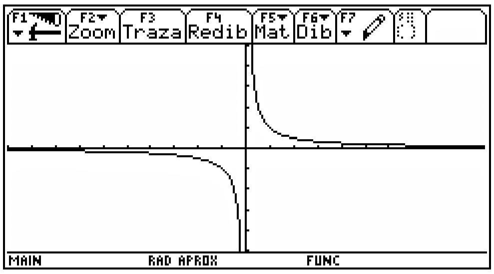




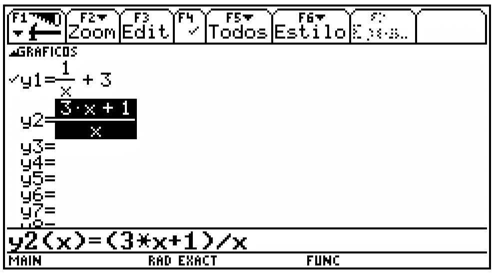


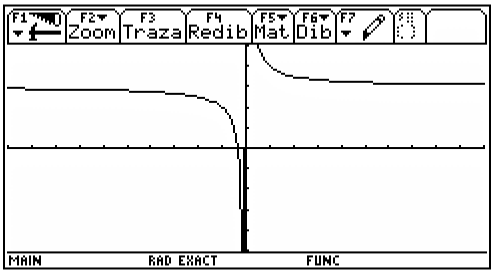
Experimentando con movimientos de los factores es posible llegar a conjeturas sobre el comportamiento de los polinomios.

Análogamente si analizamos la división de rectas, podemos partir de caso más sencillo: una hipérbola equilátera: $y = \dfrac{1}{x}$

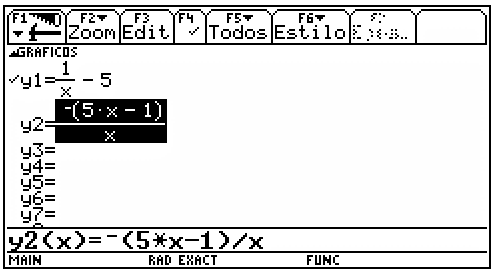


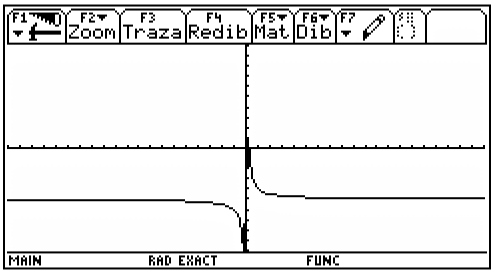
Se puede subir 3 unidades



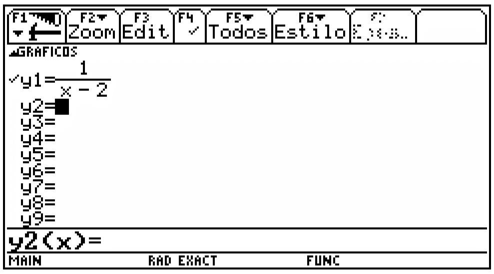


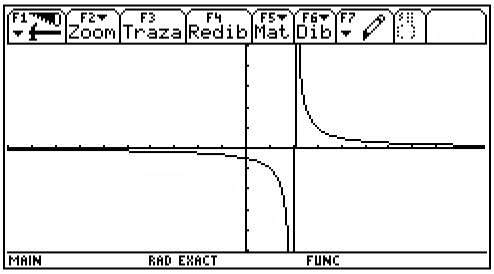
Bajar 5 unidades



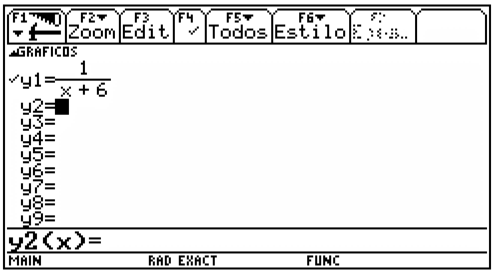


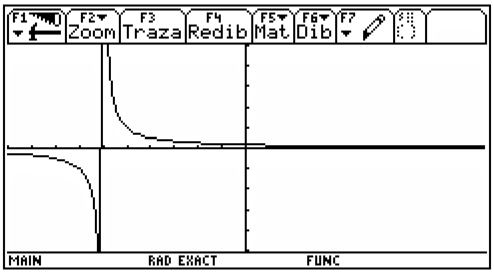
Mover a la derecha 2 unidades



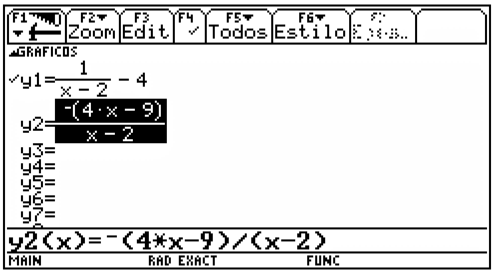


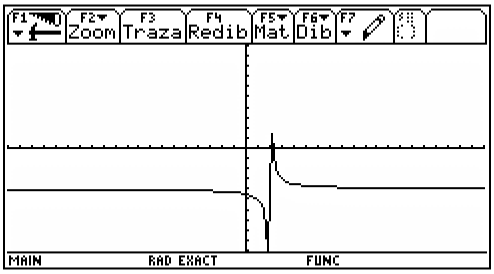
Mover a la izquierda seis unidades



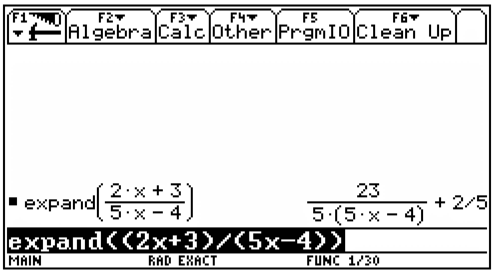


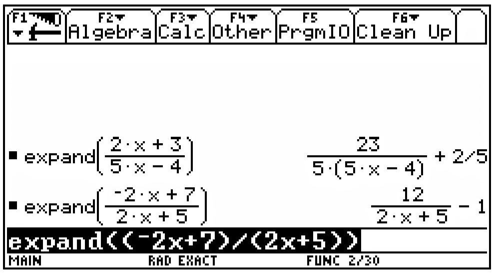
Mover a la derecha 2 unidades y bajarla 4 unidades



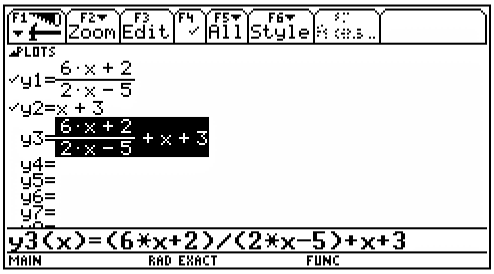


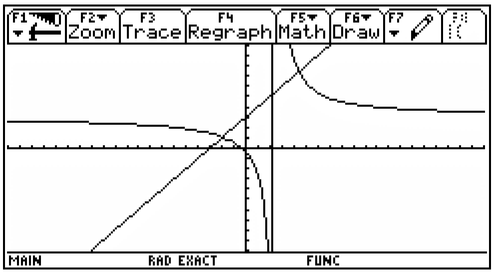
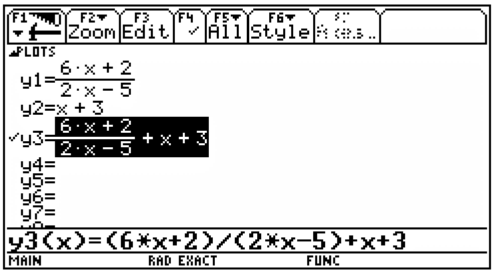
En general cuando tenemos una división de rectas, podemos constatar que son movimientos de una hipérbola equilátera.

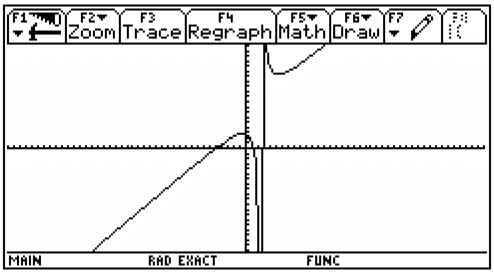


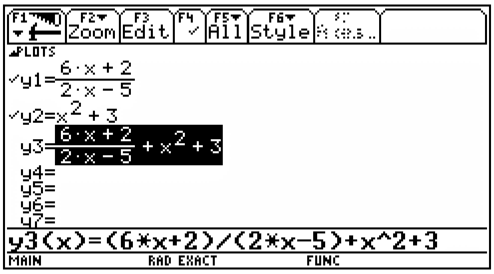


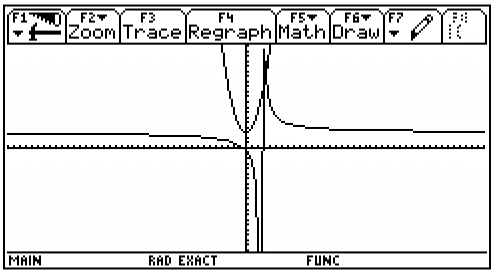
También es posible explorar sumas o restas de hipérbolas equiláteras con rectas o parábolas.

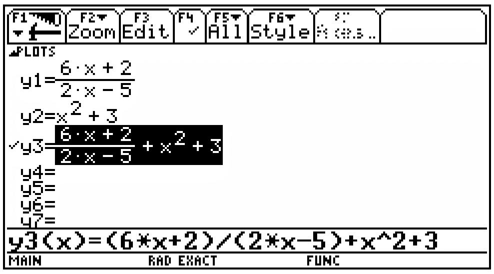


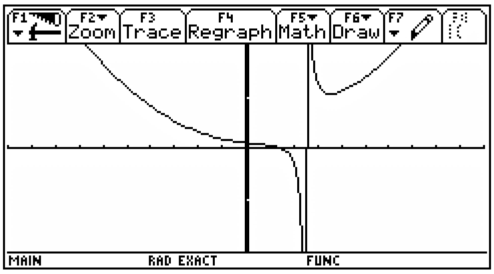





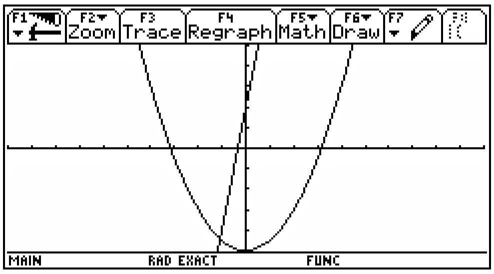


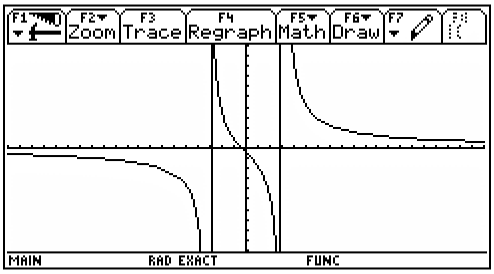


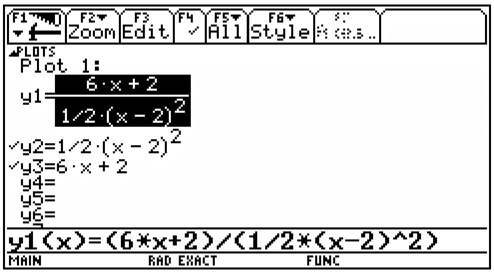


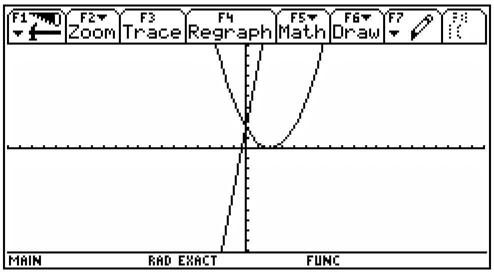


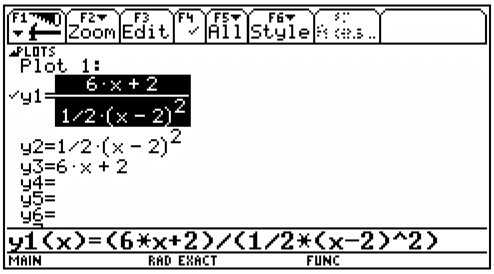
Se puede continuar con divisiones de rectas entre parábolas

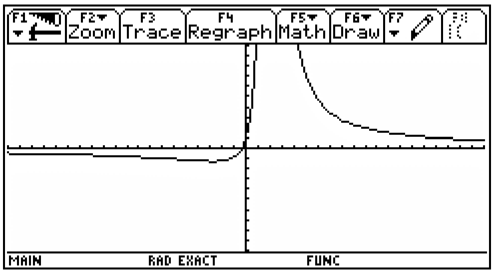


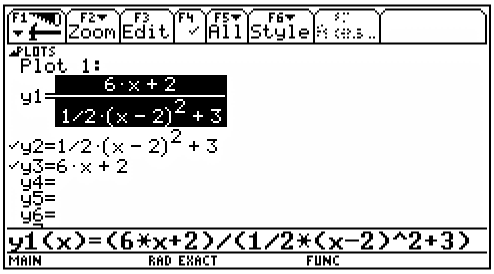


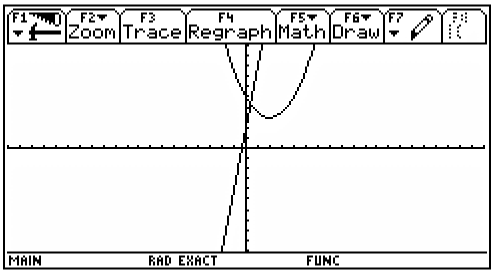


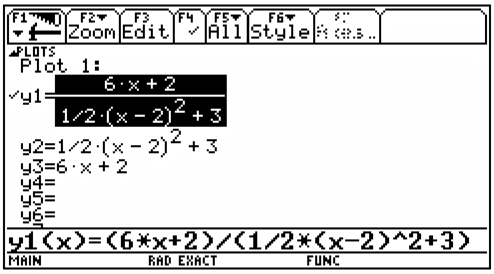


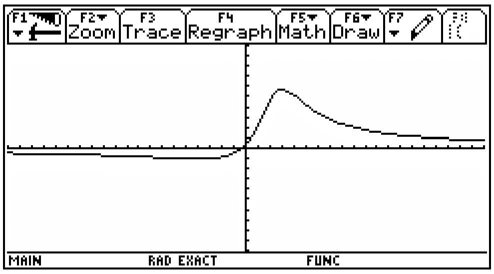












A partir de estos ensayos se pueden hacer plausibles varios contenidos de la geometría analítica o el cálculo, se deja al lector imaginarse la aplicación en clase de este tipo de actividades.

Bibliografía:

Bruner, J.; *Hacia una teoría de la instrucción*; The Belknap Press de Harvard University Press de Cambridge, Massachussets, USA, 1969.

Carretero, M., J. A. Castorina y R. Baquero (comps); *Debates constructivistas*; Psicología Cognitiva y Educación, AIQUE, Buenos Aires, Argentina, 1998.

Dienes, Z.; *Algebra*; Varazán, Madrid, España, 1972

Dreyfous, R.; *Algebloks, user´s manual*; Dreyfous & Assoc.

Howden, H.; *Algebra Tiles for the Overhead Projector*; Cuisenaire

Mancera, E.; *Matebloquemática, la forma de aprender matemáticas haciéndose la vida de cuadritos*; Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1998.

Mancera, E.; *Notas del curso Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía*; Universidad Iberoamericana, México, 2004.

Nelson, R.; *Proofs Without Words, exercises in visual thinking*; The Mathematical Association of America, Classroom Resource Materials, Number 1, Washington 1993.

Rees, P.; *Geometría Analítica*; Reverté, España, 1970.

Sánchez-Serrano, A.; *Representación de curvas problemas y aplicaciones*; Escuela Superior de Ingenieros Aeronáuticos, España, 1962.

Shilov, G. E.; *Cómo construir gráficas*; Temas Matemáticos, Limusa, México, 1976